Si B est une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E de dimension finie sur **R**, on note O(B) le groupe des automorphismes f de E tels que

$$B(f(x), f(y)) = B(x, y) \quad \text{pour tous } x, y \in E$$

et on note $O_1(B)$ le sous-groupe des $f \in O(B)$ de déterminant 1.

I

Soit E le plan vectoriel $\mathbf{R}^2$ rapporté à la base $\mathcal{B} = ((1,0), (0,1))$.

1° Préciser la matrice et le discriminant dans la base $\mathcal{B}$ des trois formes quadratiques suivantes :

$$(x, y) \longmapsto x^2$$
$$(x, y) \longmapsto xy$$
$$(x, y) \longmapsto x^2 + y^2$$

2° Calculer les termes des matrices dans la base $\mathcal{B}$ des éléments de O(B) pour les trois formes polaires B des formes quadratiques précédentes.

3° En déduire que pour toute forme bilinéaire symétrique B′ sur E le groupe $O_1(B')$ est isomorphe à l'un de quatre groupes de matrices 2×2 à préciser.

Déterminer parmi ces quatre groupes ceux qui sont isomorphes.

II

Soit A l'algèbre des matrices carrées 2×2 à termes dans le corps **R** des nombres réels. On note C la forme polaire de la forme quadratique sur l'espace vectoriel A qui à toute matrice associe son déterminant.

1° Calculer la matrice et le discriminant de C dans la base

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad h = fg.$$

2° Démontrer qu'il existe un et un seul automorphisme $x \longmapsto \bar{x}$ de l'espace vectoriel A tel que :

$$x\bar{y} + y\bar{x} = 2\,C(x, y)\,e \qquad \text{pour tous } x, y \in A.$$

Préciser sa matrice dans la base (e, f, g, h).

3° Déterminer, en fonction de $x \in A$, les $y \in A$ tels que, respectivement :

a. $\overline{xy} = \bar{y}\,\bar{x}$

b. $\overline{xy} = \bar{x}\,\bar{y}$

c. $C(\bar{x}, \bar{y}) = C(x, y)$

d. $xy + yx = -2\,C(x, y)\,e$.

4° La restriction C′ de C à l'orthogonal N de $\mathbf{R}e$ est-elle dégénérée? Pourquoi?

5° Soit s un automorphisme de l'espace vectoriel A tel que $s(e) = e$.

Démontrer que $s \in O(C)$ si et seulement si $f' = s(f)$, $g' = s(g)$ et $h' = s(h)$ sont dans N et vérifient l'une ou l'autre de deux tables de multiplication à calculer.

6° Quelles sont les propriétés remarquables de la forme trilinéaire $(x, y, z) \longrightarrow C(x, yz)$ sur N^3 ?

En déduire que $h' = f'g'$ si et seulement si s se restreint à N en un élément s' de $O_1(C')$.

7° Démontrer que $s \longmapsto s'$ définit un isomorphisme du groupe G des automorphismes de l'algèbre A sur $O_1(C')$.

8° Démontrer que tout $r \in O_1(C')$ laisse au moins un vecteur fixe $u \neq 0$.

9° Pour $u^2 \neq 0$, démontrer que les $r \in O_1(C')$ tels que $r(u) = u$ forment un groupe isomorphe à $O_1(B)$ où B est l'une de deux des formes bilinéaires du I.1° à préciser selon le signe de $C(u, u)$.

10° Pour $u^2 = 0$, démontrer que l'on peut trouver v, $w \in N$ tels que $v^2 = 0$, $C(u, v) = 1$, $C(u, w) = C(v, w) = 0$.

Calculer les termes des matrices dans la base u, v, w des $r \in O_1(C')$ tels que $r(u) = u$. En déduire que ces automorphismes r forment un groupe isomorphe à $(\mathbf{R}, +)$.

A part la question 9°, le II *est indépendant du* I.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail